**Nome e Cognome**: ..........................................................................................................

Durata: 2 ore e 30 minuti. Non è possibile usare appunti o aiuti elettronici. Scrivere le soluzioni in questi fogli.

---

**Esercizio 1** Sia $X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z^2 = 0 \right\}$ e sia $X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y - z^2 = 0 \, , x - y = 0 \right\}$.
Sia $Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e sia $Y_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 4\lambda + 2 \\ 2\mu^3 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Per $i = 1$ e $i = 2$ stabilire se $X_i$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. $Y_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? $Y_2$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$?

**Esercizio 2** Sia $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Dati i sistemi lineari

$$S_1 : \begin{cases} x - 2y - 3z + w & = -2 \\ x - y + z - w & = 3 \\ x + y + 9z - 5w & = 13 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x - 2y - 3z + w & = -2 \\ x - y + 3z - w & = 7 \end{cases}$$

1. Stabilire se X è l'insieme delle soluzioni di $S_1$ e se X è l'insieme delle soluzioni di $S_2$.

2. Trovare equazioni parametriche per l'intersezione tra i sottospazi affini definiti dai sistemi $S_1$ e $S_2$

**Esercizio 3** Sia $V$ lo spazio vettoriale delle matrici $2 \times 2$ simmetriche e sia $f\colon V \to \mathbb{R}^4$ la funzione definita da $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a-b \\ 0 \\ 2a-3c \\ b-3c \end{pmatrix}$

1. Calcolare dimensione del nucleo e dell'immagine di $f$.

2. Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia suriettiva? Esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $h(f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$?

**Esercizio 4** Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ e sia per ogni $t \in \mathbb{R}$ $B_t := \begin{pmatrix} 3 & t & 1 \\ 3 & t & 1 \\ 3 & t & 1 \end{pmatrix}$

1. $A$ è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, dare una base diagonalizzante.
2. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $B_t$ è diagonalizzabile?